Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 18 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(2 Punkte)* Zeige, dass eine absolut konvergente Reihe stets konvergiert, d.h. für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gilt die Implikation

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Lösung. Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert bilden die Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Das heißt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\forall m, n \geq N$ die Ungleichung $\left|\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|\right| = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$ gilt. Aus der Dreiecksungleichung folgern wir ebenso für alle $m, n \geq N$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch eine Cauchy-Folge bilden. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ folgern wir nun die Konvergenz dieser Reihe. ■

Aufgabe 2: *(5 Punkte)* Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren absolut und welche divergieren? Begründe die jeweiligen Antworten.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{k^n}$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n n}$ für $x \in [-4, 4)$.

Lösung.

(a) Falls $k = 1$ divergiert diese Reihe, weil wir in dem Fall $\sum_{n=1}^{\infty} n$ erhalten. Für jedes $k \geq 2$ konvergiert sie aber. Dies beweisen wir mittels des Quotientenkriteriums. Für $a_n = \frac{n^k}{k^n}$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{k^n (n+1)^k}{k^{n+1} n^k} = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k.$$

Aus $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = 1$ folgern wir, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$$

da $k \geq 2$. Insbesondere existiert für jedes ε mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für jedes $n \geq N$ die Ungleichung

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon < 1$$

gilt. Damit ist diese Reihe (absolut) konvergent.

(b) Für $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ erhalten wir, nach Einsetzen der Definition von $n!$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} > 1$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend (und keine Nullfolge) und damit divergiert die Reihe.

(c) Für $a_n = \frac{x^n}{4^n n}$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}4^n n}{x^n 4^{n+1}(n+1)}\right| = \left|\frac{x}{4}\right|\frac{n}{n+1}$$

Weil $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$, folgern wir ähnlich wie im Teil (a) für jedes $x \in (-4, 4)$, dass die Reihe absolut konvergiert. Für $x = -4$ konvergiert die Reihe aber nicht absolut (weil $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ in diesem Fall die harmonische Reihe ist). Trotzdem ist die Reihe konvergent nach dem Leibnizkriterium, weil die Folge der $|a_n|$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

■

Aufgabe 3: *(3 Punkte)* Für die Summanden $a_k = 1/k$ der (divergenten!) harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

gilt doch

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} < 1 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit müsste die harmonische Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergieren, oder? Erkläre, warum sich das Quotientenkriterium nicht auf die harmonische Reihe anwenden lässt.

Lösung. Nein, weil wir nicht nur die Abschätzung $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ brauchen. Wir brauchen ein $q \in [0, 1)$ sodass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ bzw. alle hinreichend großen k gilt. Im Fall der harmonischen Reihe können wir einsehen, dass so ein $q \in [0, 1)$ nicht existiert, denn wegen

$$\left|\frac{k}{k+1}\right| = \left|\frac{1}{1+1/k}\right| \longrightarrow 1$$

für $k \to \infty$, existiert für jedes $q \in [0, 1)$ ein Mindestindex $K \in \mathbb{N}$, sodass der obige Bruch ab Index K einheitlich größer als q ist. ■